Calentamiento

1. Se seleccionan dos puntos al azar del intervalo $[0,1]$.

a) Determinar la probabilidad de que se pueda formar un triángulo con los tres segmentos que se forman.

b) Determinar la probabilidad de que los tres segmentos que se forman midan más de $1/4$.

2. Seleccionamos tres puntos aleatoriamente en una circunferencia. Determine la probabilidad de que los tres puntos se encuentren en el mismo semicírculo.

3. Sean r y s enteros positivos. Demuestra que cualquier sucesión de $(r-1)(s-1)+1$ enteros contiene una subsucesión monótonamente creciente de longitud r o una subsucesión monotonaménte decreciente de longitud s.

Invariantes

4. Se escriben los números $1, 2, \ldots, n$ en una pizarra. Cada minuto se borran dos números a y b y se escribe el número $a+b-1$. ¿Qué número quedará en la pizarra tras $n-1$ operaciones?

5. Se colocan $2n+1$ fichas, blancas y negras, en una fila. Se dice que una ficha es *equilibrada* si el número de fichas blancas a su izquierda mas el número de fichas negras a su derecha es n. Determina la paridad de el número de fichas *equilibradas*.

6. En un tablero $n \times n$ hay n^2 casillas, $n-1$ de las cuáles son negras y el resto blancas. Cada segundo, cualquier casilla blanca adyacente a al menos dos casillas negras se convierte en una casilla negra. Demuestra que habrá al menos una casilla blanca que nunca se convertirá en negra.

Monovariantes

7. N personas se encuentran en una mansión de M habitaciones. Cada minuto, siempre que las N personas no esten en la misma habitación, alguien camina de una habitación hacia otra diferente con al menos tantas personas como había en la habitación anterior. Prueba que eventualmente todos se encontrarán en una habitación.

8. Hay N ranas sentadas en una fila de M nenúfares. Cada minuto, si hay dos ranas en el mismo nenufar, y este nenufar no se encuentra en ninguno de los dos extremos de la fila, las dos ranas pueden saltar a los dos nenúfares adyacentes (en direcciones opuestas), prueba que este proceso no puede repetirse indefinidamente.

9. En el plano hay n puntos rojos y n puntos azules, tal que no hay tres de ellos colineales. Prueba que podemos unirlos con n segmentos, cada segmento uniendo un punto rojo y un punto azul, tal que dos segmentos cualesquiera no intersecan.

El principio del extremo

10. N personas se sientan en una mesa circular tal que la edad de cada persona es la media de las edades de las dos peronas que sientan al lado suya. Demuestra que todas las edades son iguales.

11. Quince hojas de papel, de diferentes tamaos y formas, se encuentran encima de un escritorio, cubriendolo completamente. Estas hojas pueden solaparse e incluso colgar del borde del escritorio. Demuestra que puedes quitar cinco de ellas de tal manera que las diez restantes cubren al menos dos tercios del escritorio.

12. Sea X un subconjunto de los enteros positivos tal que la suma de cualesquiera dos elementos de X (no necesariamente distintos) está en X. Supongamos que $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ es el conjunto de los enteros positivos que no están en X. Prueba que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$.